# Makro/Mikro I
# Übungen und Selbststudium
# Produktion und Wachstum

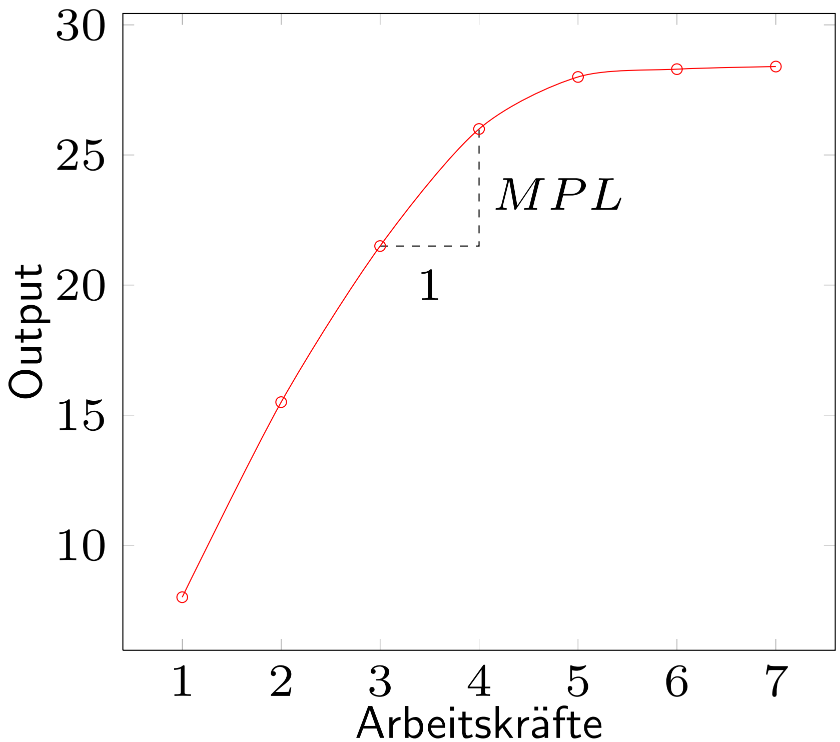
Nicolas A. Cuche-Curti
Schweizerische Nationalbank und Universität St. Gallen

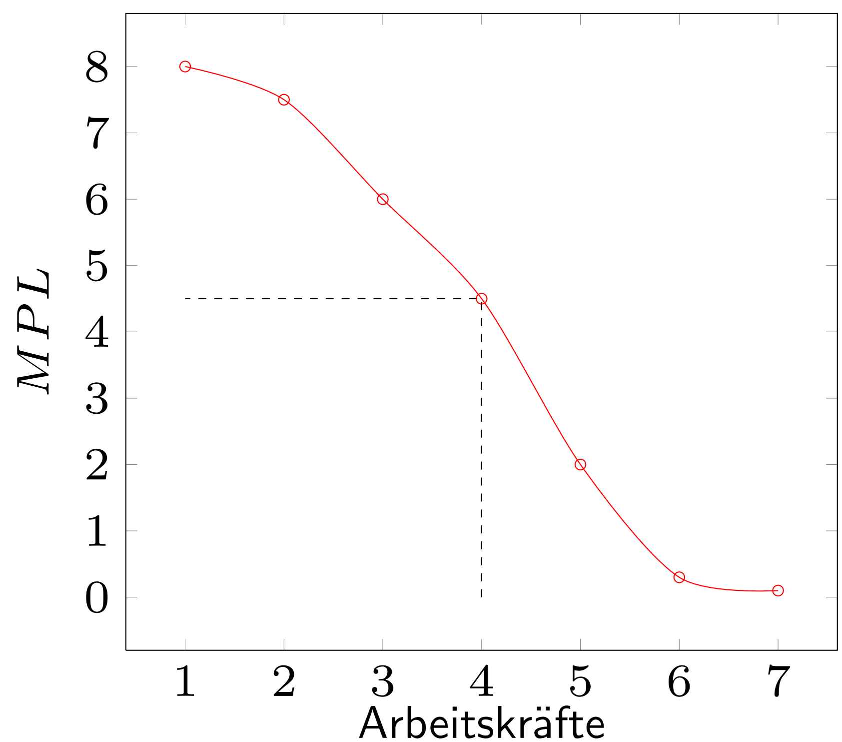
nicolas.cuche-curti@snb.ch
http://cuche.net/classes.htm

14. Mai 2010

# Aufgabe 1

- Grafische Darstellung der Produktionsfunktion (gegeben in der Tabelle)
- Grafische Darstellung des Grenzprodukts der Arbeit ($MPL$), d. h. zusätzliches Output für eine zusätzliche Einheit Input (hier, Produktionsfaktor Arbeit)



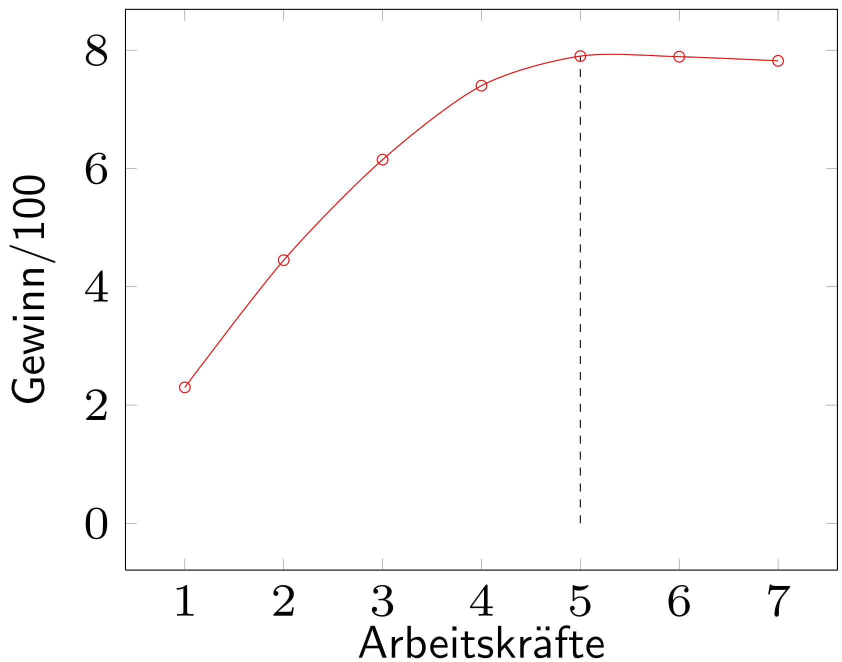



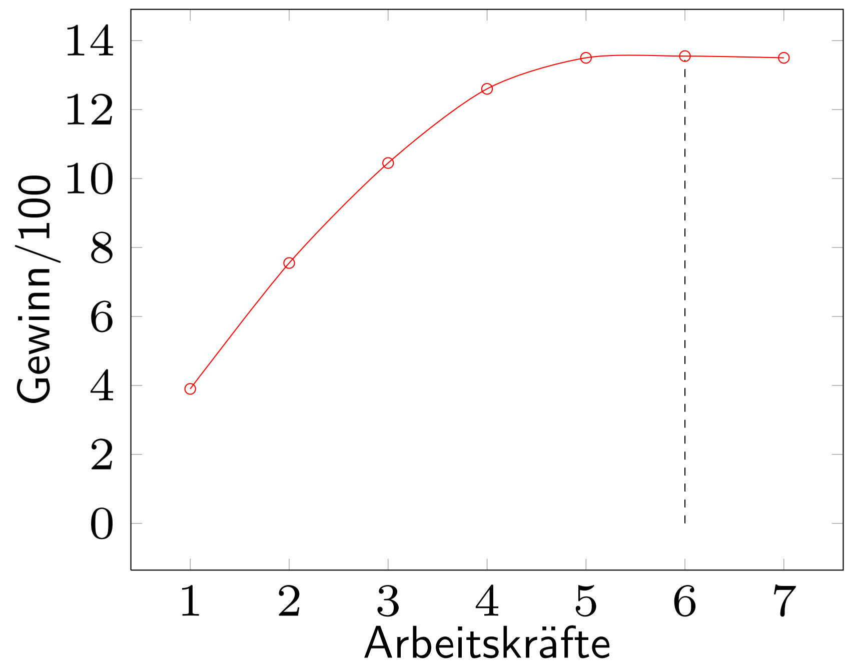
# Aufgabe 1

- Idee der Übung: Herleitung der Arbeitsnachfragefunktion
  - Firmen = Angebot auf dem Gütermarkt
  - Firmen = Nachfrage auf dem Faktorenmarkt
  - Mechanismus: Outputpreis und Lohn sind gegeben, Gewinnmaximierung, optimale Nachfrage nach Arbeit
  - eine Änderung des Lohnes/des Preises/der Technologie bedeutet eine neue Optimierung, d.h. eine neue Nachfrage (Verschiebung der Kurve/auf der Kurve)
- a) Outputpreis $= 30$
  - $P \times MPL = W \rightarrow 30 \times MPL = 10 \rightarrow MPL = 0.33 \rightarrow$ 5 oder 6 Arbeitskräfte
  - Gewinn(5): $G = 30 \times 28 - 5 \times 10 = 790$
  - Gewinn(6): $G = 30 \times 28.3 - 6 \times 10 = 789$
  - 5 Arbeitskräfte
- b) Outputpreis $= 50$
  - $P \times MPL = W \rightarrow 50 \times MPL = 10 \rightarrow MPL = 0.2 \rightarrow$ 6 oder 7 Arbeitskräfte
  - Gewinn(6): $G = 50 \times 28.3 - 6 \times 10 = 1355$
  - Gewinn(7): $G = 50 \times 28.4 - 7 \times 10 = 1350$
  - 6 Arbeitskräfte

# Aufgabe 1

- c) Verschiebung der Kurve
  - Nachfragefunktion nach Arbeit (z. B. Anzahl Arbeitskräfte) ist ein Funktion des Lohnes
  - Outputpreis u.a. bewegt die Nachfragekurve nach unten (Preisabnahme, Firma braucht weniger Arbeitskräfte) oder nach oben (Preiszunahme, Firma braucht mehr Arbeitskräfte)
- Grafische Darstellung der Gewinnfunktion für Outputpreise $30$ und $50$; Gewinn $=$ Umsatz (Erlös) minus Kosten



# Aufgabe 2

- Produktionsfunktion: $BIP$ $(Y)$ als Funktion von Arbeit $(A)$, Kapital $(K)$ und Produktivität, $TFP$ $(a)$; Form der Funktion ist Cobb-Douglas; diese Funktion fasst die Angebotsseite der Volkswirtschaft zusammen; zudem stellt sie die 'Kräfte' des langfristigen Wachstums der Schweiz dar

$$Y = aA^{0.5}K^{0.5}$$

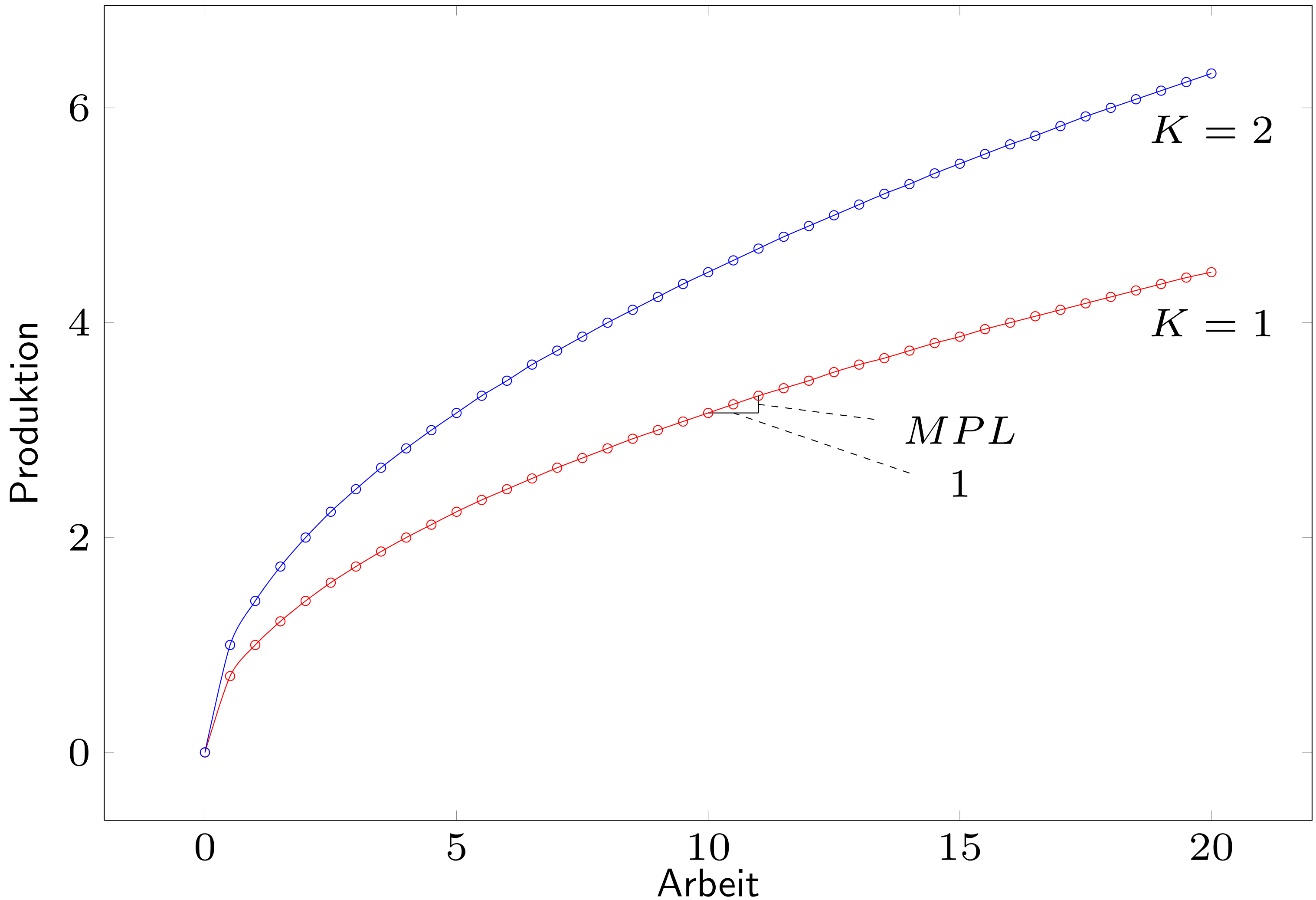
- a) Skalenerträge:
  - steigend, abnehmend, konstant; Form der Durchschnittskosten
  - Experiment, alle Faktoren – Kapital und Arbeit – nehmen zu, z. B. $+10\%$, d. h. $x = 1.01$; wenn die Summe der Exponenten gleich 1 ist, bedeutet es konstante Skalenerträge (grösser als 1, steigende, kleiner als 1, abnehmende)

$$a(xA)^{0.5}(xK)^{0.5} = ax^{0.5}A^{0.5}x^{0.5}K^{0.5}$$

$$x(aA^{0.5}K^{0.5}) = xY$$

- b) Grafik der Produktionsfunktion wenn $K$ fix ist (kurzfristige Annahme); die Funktion wird zweidimensional; Beispiele mit $K = 1$ und $K = 2$

# Aufgabe 2



# Aufgabe 2

- c) Grenzprodukt der Arbeit ($MPL$): Berechnung

$$Y = aA^{0.5}K^{0.5}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial A} = a0.5A^{0.5-1}K^{0.5}$$
$$\frac{\partial Y}{\partial A} = a0.5\frac{A^{0.5}}{A}K^{0.5}$$
$$\frac{\partial Y}{\partial A} = 0.5\frac{Y}{A}$$

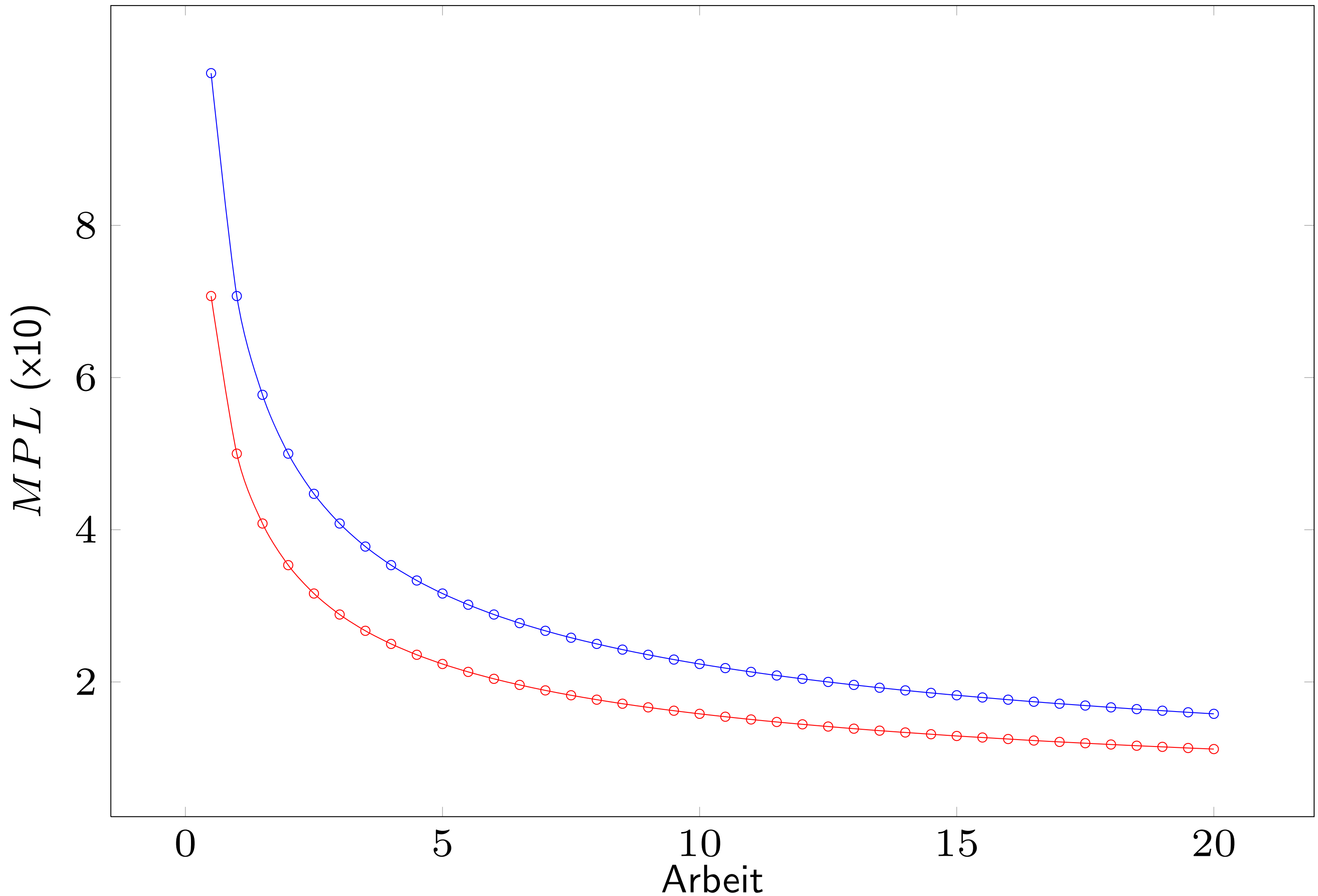
wenn $K = 1$ und $a = 1$, $MPL = 0.5\frac{A^{0.5}}{A} = \frac{0.5}{A^{0.5}} = \frac{1}{2\sqrt{A}}$

- d,e) Grenzprodukt der Arbeit ($MPL$): Verlauf wenn $K = 1$ und $K = 2$; $\sqrt{2} = 1.4142$

$$Y(K = 1, a = 1) = A^{0.5} \rightarrow MPL = \frac{0.5}{\sqrt{A}}$$

$$Y(K = 2, a = 1) = A^{0.5}\sqrt{2} \rightarrow MPL = \frac{0.5\sqrt{2}}{\sqrt{A}}$$

# Aufgabe 2



# Aufgabe 2

- f,g) siehe Grafik
- h) $a = 1.4142$, alle Kurven werden nach oben verschoben; Vergleich Konstellation $K = 2, a = 1$ und $K = 1, a = 1.4142$
- i) Bildungsoffensive, $MPL$ steigt
- j) Gewinnmaximierung $(a = 1)$
  - Gewinn

$$G = \text{Umsatz} - \text{Kosten} = PY - WA$$

  - Optimierung (erste Ableitung gleich null)

$$\frac{\partial G}{\partial A} = P\frac{\partial Y}{\partial A} - W = 0$$

  - neu schreiben
    - Optimalitätsbedingung

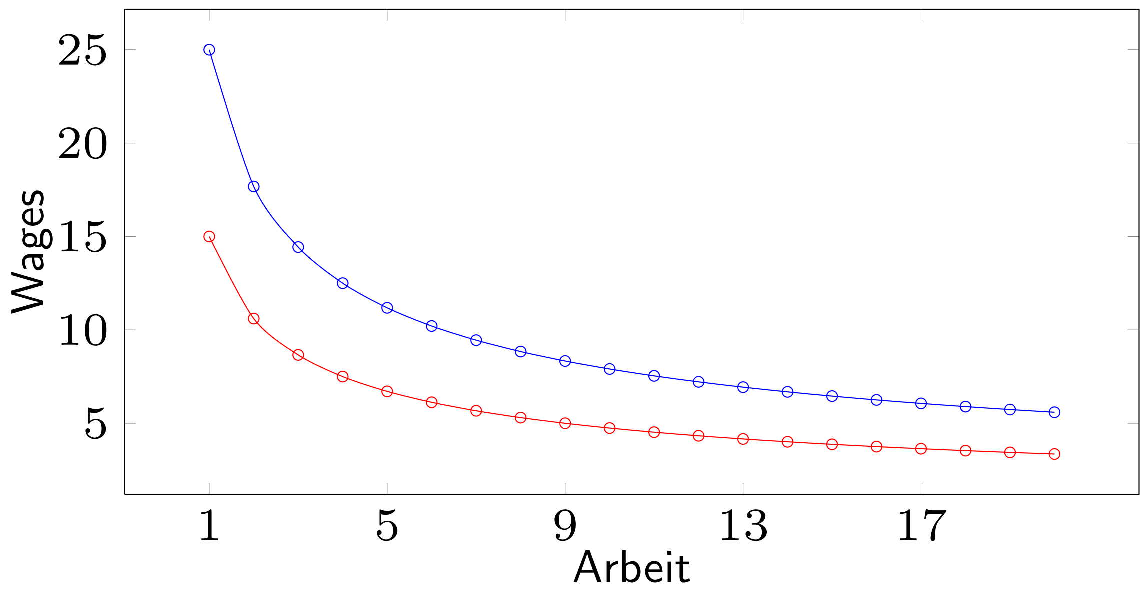
$$P\frac{\partial Y}{\partial A} = W \qquad \rightarrow \qquad P \times MPL = W$$

- Nachfragefunktion nach Arbeit

$$P\frac{Y}{2A} = W \qquad \rightarrow \qquad \text{Arbeitsnachfrage}$$

$$A = \frac{1}{W}\frac{PY}{2} \qquad \rightarrow \qquad A = \left(\frac{1}{W}\frac{PaK^{0.5}}{2}\right)^2 \qquad \rightarrow \qquad A = \left(\frac{1}{W}\frac{P}{2}\right)^2$$

$$A = \left(\frac{1}{2}\frac{12}{2}\right)^2 = 9 \qquad \rightarrow \qquad MPL = \frac{0.5}{\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$$



# Aufgabe 3

- Gesamtwirtschaftliche Produktion $Y(L,K) = aA^{0.5}K^{0.5}$
- $GRS$ gibt an, um wie viele Einheiten der eine Faktor erhöht werden muss, wenn der andere Faktor um eine Einheit sinkt, damit die Produktion konstant bleibt
- Berechnung via Total differential

$$\begin{aligned} dY = 0 = dA(a0.5A^{-0.5}K^{0.5}) + dK(a0.5A^{0.5}K^{-0.5}) \\ dA(a0.5A^{-0.5}K^{0.5}) = -dK(a0.5A^{0.5}K^{-0.5}) \\ dA(A^{-1}) = -dK(K^{-1}) \\ \frac{dA}{dK} = -\frac{A}{K} \end{aligned}$$

- $K = 2A$, $GRS = -\frac{A}{2A} = -\frac{1}{2}$
- Erhöhung von $K$, $K = 3A$, $GRS = -\frac{A}{3A} = -\frac{1}{3}$
- Vergleich?

# Aufgabe 4

- Produktionsfunktion $Y = xL^{\alpha}K^{1-\alpha}$
- Kostenfunktion, $C = wL + rK$
- Optimierung, $L = wL + rK + \lambda(Y - xL^{\alpha}K^{1-\alpha})$, FOC

$$w + \lambda(-x\alpha L^{\alpha-1}K^{1-\alpha}) = 0$$

$$r + \lambda(-x(1-\alpha)K^{-\alpha}L^{\alpha}) = 0$$

$$\lambda = \frac{w}{x\alpha L^{\alpha-1}K^{1-\alpha}}$$

$$\lambda = \frac{r}{x(1-\alpha)K^{-\alpha}L^{\alpha}}$$

$$\frac{w}{x\alpha L^{\alpha-1}K^{1-\alpha}} = \frac{r}{x(1-\alpha)K^{-\alpha}L^{\alpha}}$$

$$\frac{w}{r} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{L^{\alpha-1}K^{1-\alpha}}{K^{-\alpha}L^{\alpha}}$$

$$\frac{w}{r} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{K}{L}$$

# Aufgabe 4

- Faktornachfrage

$$Y = xL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$
$$L = \frac{r}{w}\frac{\alpha}{1-\alpha}K$$
$$Y = x\left(\frac{r}{w}\frac{\alpha}{1-\alpha}K\right)^{\alpha}K^{1-\alpha}$$
$$Y = x\left(\frac{r}{w}\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\alpha}K$$
$$K = \frac{1}{x\left(\frac{r}{w}\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\alpha}}Y$$

- Faktornachfrage

$$L = \frac{1}{x\left(\frac{w}{r}\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{1-\alpha}}Y$$

# Aufgabe 4

- Ex-Kurs: Kosten

$$
\begin{aligned}
C &= wL + rK = w\left(\frac{1}{x\left(\frac{w}{r}\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{1-\alpha}}Y\right) + r\left(\frac{1}{x\left(\frac{r}{w}\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\alpha}}Y\right) \\
C &= \left[w\left(\frac{1}{\left(\frac{w}{r}\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{1-\alpha}}\right) + r\left(\frac{1}{\left(\frac{r}{w}\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\alpha}}\right)\right]\frac{Y}{x} \\
C &= \left[w\left(\frac{r}{w}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} + r\left(\frac{w}{r}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\alpha}\right]\frac{Y}{x} \\
C &= \left[\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\alpha}\right] w^{\alpha} r^{1-\alpha}\frac{Y}{x} \\
C &= \frac{(1-\alpha)^{\alpha-1}}{\alpha^{\alpha}} w^{\alpha} r^{1-\alpha}\frac{Y}{x}
\end{aligned}
$$

- Ex-Kurs: lambda

$$\lambda = \frac{w}{x\alpha L^{\alpha-1} K^{1-\alpha}}$$

$$\lambda = \frac{w}{x\alpha \left(\frac{K}{L}\right)^{1-\alpha}}$$

$$\lambda = \frac{w}{x\alpha} \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha-1}$$

$$\lambda = \frac{w}{x\alpha} \left(\frac{w(1-\alpha)}{r\alpha}\right)^{\alpha-1}$$

# Aufgabe 5

- Problem

$$\begin{aligned} U &= c + \ln \ell \\ &= c + \ln(1-n) \\ &= wn + \ln(1-n) \end{aligned}$$

- Maximierung $(n)$

$$\begin{aligned} 0 &= w - \frac{1}{1-n} \\ w &= \frac{1}{1-n} \end{aligned}$$

- Resultate

$$\begin{aligned} n^\star &= 1 - \frac{1}{w} \\ \ell^\star &= \frac{1}{w} \\ c^\star &= w - 1 \end{aligned}$$

- Arbeitsangebot

$$w = \frac{1}{1-n^\star}$$

- Neue Maximierung

$$\begin{aligned} U &= \ln c + a \ln \ell \\ &= \ln c + a \ln (1-n) \\ &= \ln(wn) + a \ln (1-n) \end{aligned}$$

- FOC, $\frac{1}{wn} - a\frac{1}{1-n} = 0$, $n = \frac{1}{1+a}$