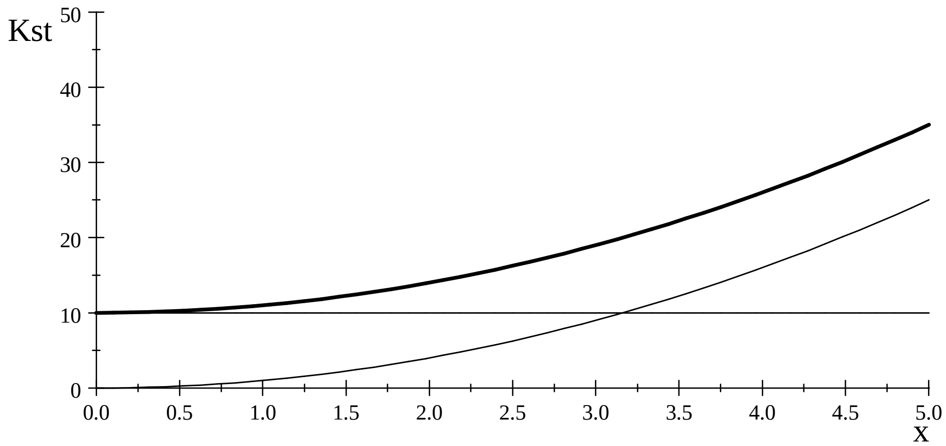
cuche.net
N A C @

Aufgabe 1 (Kostenfunktion)

$$k(x) = \underbrace{x^2}_{\text{VK}} + \underbrace{10}_{\text{FK}}$$

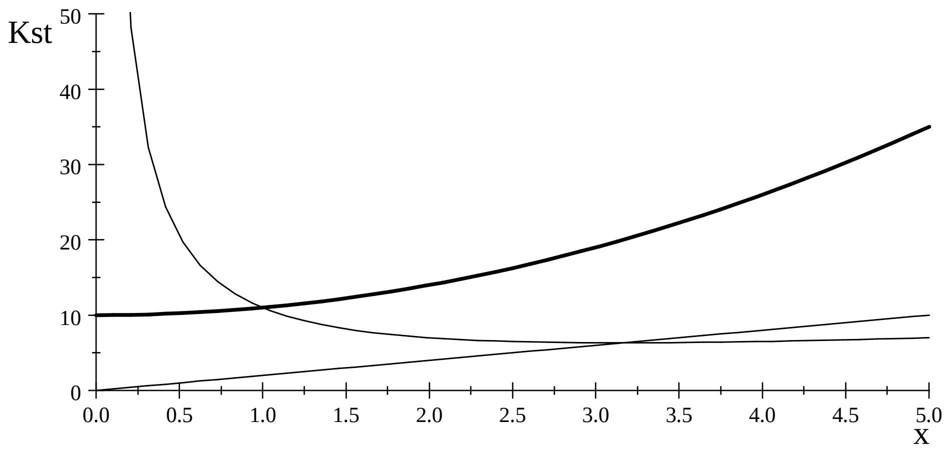


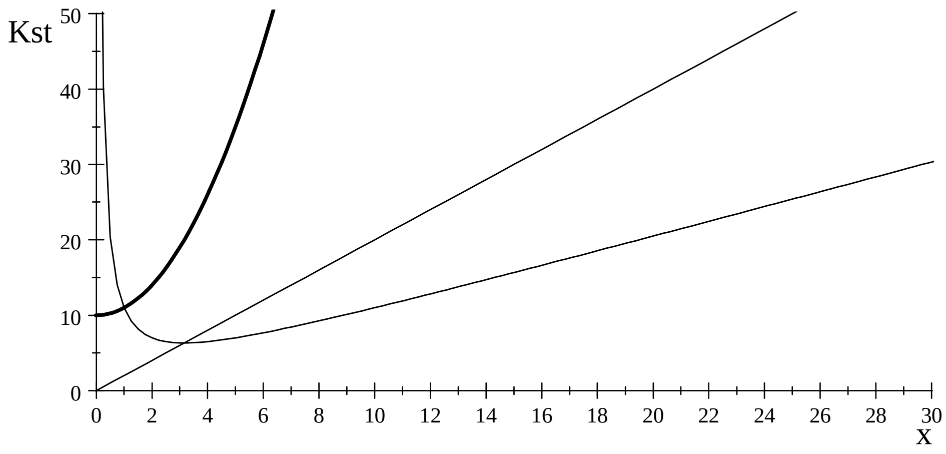
Grenzkosten

$$\begin{aligned} \frac{dk(x)}{dx} &= 2x \\ &\rightarrow \min, x = 0 \end{aligned}$$

Durchschnittskosten

$$\begin{aligned} \frac{k(x)}{x} &= x + \frac{10}{x} \\ &\rightarrow \min, 1 - \frac{10}{x^2} = 0 \\ x &= \sqrt{10} = 3.16 \end{aligned}$$





DK>GK, 10>9, $\frac{100}{10} > 9$, Produktion $\nearrow$, DK=$\frac{109}{11} = 9, ... < 10$

GK>DK, 55>50, $55 > \frac{500}{10}$, Produktion $\searrow$, DK=$\frac{445}{9} = 49, ... < 50$

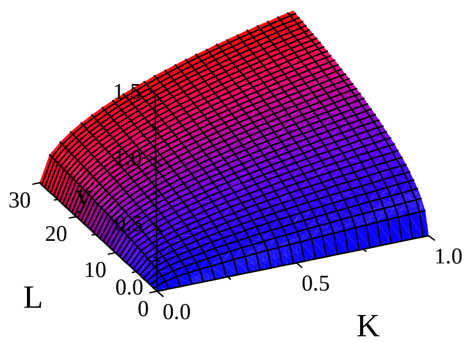
Aufgabe 2 (Kostenfunktion)

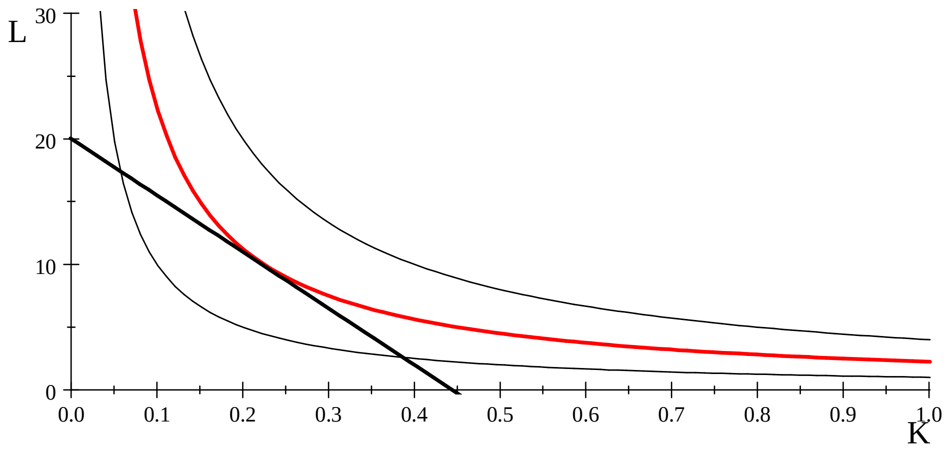
Produktionsfunktion = Zusammenhang zwischen Faktoreinsatz und produzierter Menge bei technisch effizienter Produktion; mit einem Faktor, λ Arbeitsproduktivität ($\neq$ TFP):

$$\begin{aligned} y &= \lambda L \to L = \frac{y}{\lambda} \\ Kst(y) &= wL = w\frac{y}{\lambda} = \frac{w}{\lambda}y \end{aligned}$$

Mit zwei Faktoren:

$$\begin{aligned} y &= \mathcal{A}L^{0.5}K^{0.5} \to L = \sqrt{\frac{y}{\mathcal{A}K^{0.5}}} \\ Kst &= wL + iK \\ K &= 1 \to L = \sqrt{\frac{y}{\mathcal{A}}} \to Kst(y) = w\sqrt{\frac{y}{\mathcal{A}}} + i \\ K &= 2 \to L = \sqrt{\frac{y}{\mathcal{A}2^{0.5}}} \to Kst(y) = w\sqrt{\frac{y}{\mathcal{A}2^{0.5}}} + i2 \\ K &= 3 \to L = \sqrt{\frac{y}{\mathcal{A}3^{0.5}}} \to Kst(y) = w\sqrt{\frac{y}{\mathcal{A}3^{0.5}}} + i3 \\ &\vdots \end{aligned}$$





Schwarze Gerade (Intercept als Funktion vom Budget; Steigung = relative Preise der Faktoren)

$$\begin{aligned} Kst &= wL + iK \\ L &= \frac{Kst}{w} - \frac{i}{w}K \end{aligned}$$

Ex-Kurs: makroökonomische Produktionsfunktion (constant returns to scale)

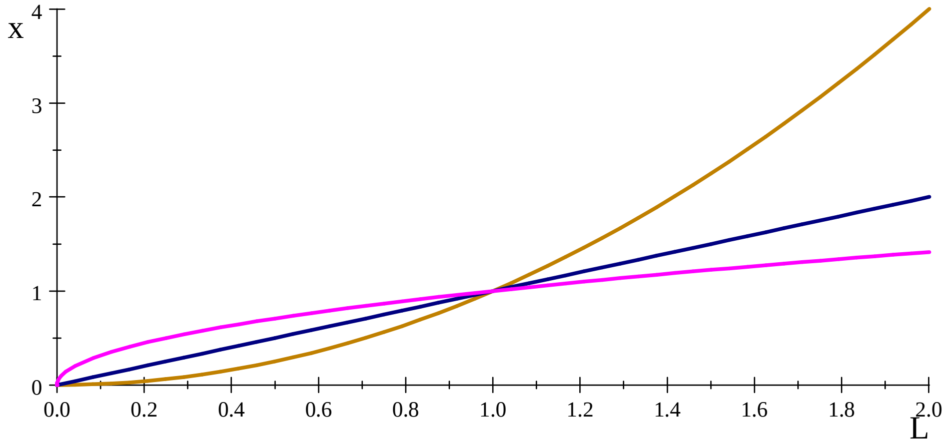
$$\begin{aligned} Y_t &= A_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \\ \ln Y_t &= \alpha \ln K_t + (1-\alpha) \ln L_t + \ln A_t \\ y_t &= \alpha k_t + (1-\alpha) l_t + \underbrace{\varepsilon_t}_{TFP} \end{aligned}$$

<u>Aufgabe 3</u>

Produktionfunktion

$$x = L^a$$

$a = 0.5, 1, 2$



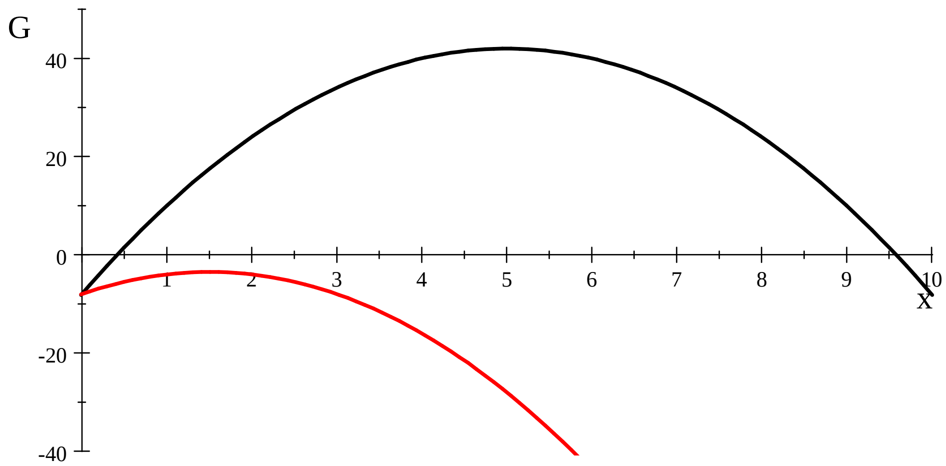
Kostenfunktion ($a = 0.5, p = 20, w = 2$)

$$\begin{aligned} x &= L^a \\ x^{\frac{1}{a}} &= L \\ wx^{\frac{1}{a}} &= wL = VK \\ Kst &= wx^{\frac{1}{a}} + 8 = 2x^2 + 8 \end{aligned}$$

Gewinnfunktion und optimale Menge

$$\begin{aligned} G &= px - wx^{\frac{1}{a}} - 8 \\ \frac{dG}{dx} &= p - \frac{1}{a} wx^{\frac{1}{a}-1} = 0 \\ \frac{1}{a} wx^{\frac{1}{a}-1} &= p \rightarrow x = \left(\frac{ap}{w}\right)^{\frac{a}{1-a}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \left(\frac{ap}{w}\right)^{\frac{a}{1-a}} \rightarrow 5 = \left(\frac{0.5 \times 20}{2}\right)^1 \\ L &= 25 \\ G &= 20 \times 5 - 2 \times 25 - 8 = 42 \end{aligned}$$



Preis nimmt ab, $p = 6$

$$x = \left(\frac{ap}{w}\right)^{\frac{a}{1-a}} \rightarrow 1.5$$
$$L = 1.5^2 = \frac{9}{4}$$
$$G = 1.5 \times 6 - 2 \times 1.5^2 - 8 = 4.5 - 8 = -3.5$$

Kurzfristig wird es produziert, da p>vdk ($6 > \frac{2\times 1.5^2}{1.5} = 3$); langfristig, Eintritt wenn die Fixkosten kleiner als 4.5 sind ($\max(0, 4.5 - FK)$)

Gewinn $G = px - wx^{\frac{1}{a}} - 8 = 0$

$$0 = p\left(\frac{ap}{w}\right)^{\frac{a}{1-a}} - w\left(\frac{ap}{w}\right)^{\frac{1}{1-a}} - 8$$

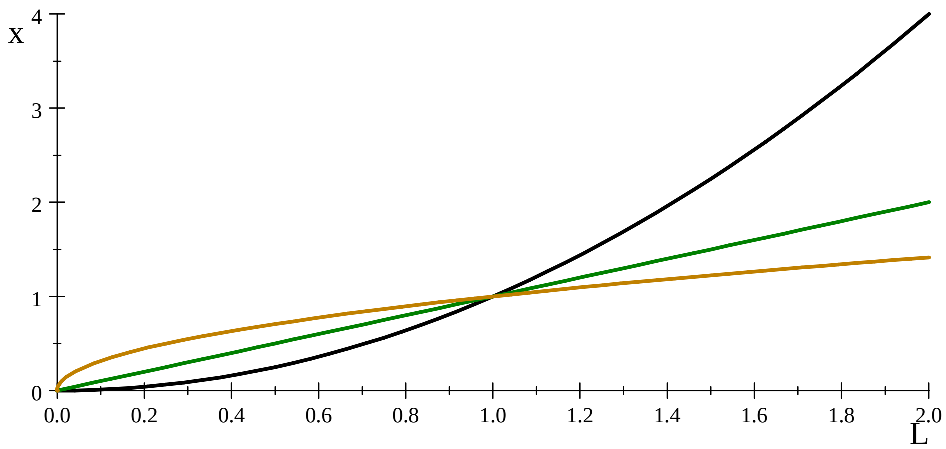
$$
\begin{aligned}
0 &= p\left(\frac{a}{w}\right)^{\frac{a}{1-a}} p^{\frac{a}{1-a}} - w\left(\frac{a}{w}\right)^{\frac{1}{1-a}} p^{\frac{1}{1-a}} - 8 \\
0 &= \left(\frac{a}{w}\right)^{\frac{a}{1-a}} p^{\frac{1}{1-a}} - w\left(\frac{a}{w}\right)^{\frac{1}{1-a}} p^{\frac{1}{1-a}} - 8 \\
0 &= p^{\frac{1}{1-a}} - ap^{\frac{1}{1-a}} - \frac{8}{\left(\frac{a}{w}\right)^{\frac{a}{1-a}}} \\
0 &= p^{\frac{1}{1-a}}(1-a) - 8\left(\frac{a}{w}\right)^{\frac{a}{a-1}} \\
p &= \left(\frac{8\left(\frac{a}{w}\right)^{\frac{a}{a-1}}}{1-a}\right)^{1-a} = 8
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4

Siehe Zeichnungen, Musterlösungen

Aufgabe 5

Produktionsfunktion $x = L^{\frac{1}{a}}$ (verschiedene Werte für a)



Kurz. Kostenfunktion, $w = 10$, a>1 = neg. Skalenerträge

$$\begin{aligned}
Kst &= wL + 10 = 10x^a + 10 \\
FK &= 10 \\
VK &= 10x^a \\
GK &= a10x^{a-1} \\
DK &= 10x^{a-1} + \frac{10}{x}
\end{aligned}$$

Gewinn

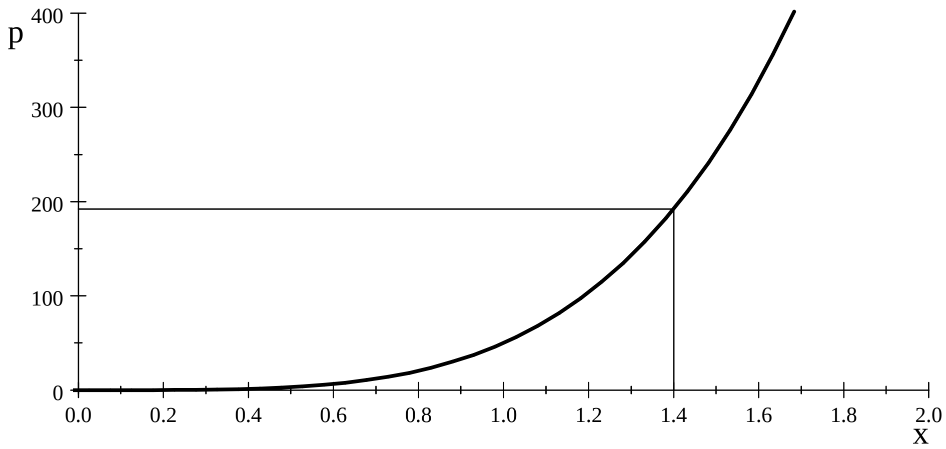
$$\begin{aligned}
G &= px - 10x^a + 10 \\
p - a10x^{a-1} &= 0 \\
p &= a10x^{a-1} \\
x &= \left(\frac{p}{a10}\right)^{\frac{1}{a-1}} = \left(\frac{10a}{p}\right)^{\frac{1}{1-a}}
\end{aligned}$$

Kommentar, Preis-Elastizität der optimalen Menge (des Angebots)$\left(\frac{\partial x}{\partial p} = \frac{1}{a-1}\frac{x}{p}\right)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial p}\frac{p}{x} &= \frac{1}{1-a}\left(\frac{10a}{p}\right)^{\frac{1}{1-a}-1}\left(\frac{-10a}{p^2}\right)\frac{p}{\left(\frac{10a}{p}\right)^{\frac{1}{1-a}}} \\
&= -\frac{1}{1-a}\frac{\left(\frac{10a}{p}\right)^{\frac{1}{1-a}}}{\left(\frac{10a}{p}\right)^{\frac{1}{1-a}}}\frac{10a}{\frac{10a}{p}}\frac{p}{p^2} = \frac{1}{a-1}
\end{aligned}$$

z. B a=5, $p = 50x^4$; Elastizität=0.25; Punkt $(1.4, 192.08)$; Pfad

$\frac{192.08}{1.4} = 137.2$; Steigung $\frac{\partial p}{\partial x} = 200x^3 \rightarrow 548.8$

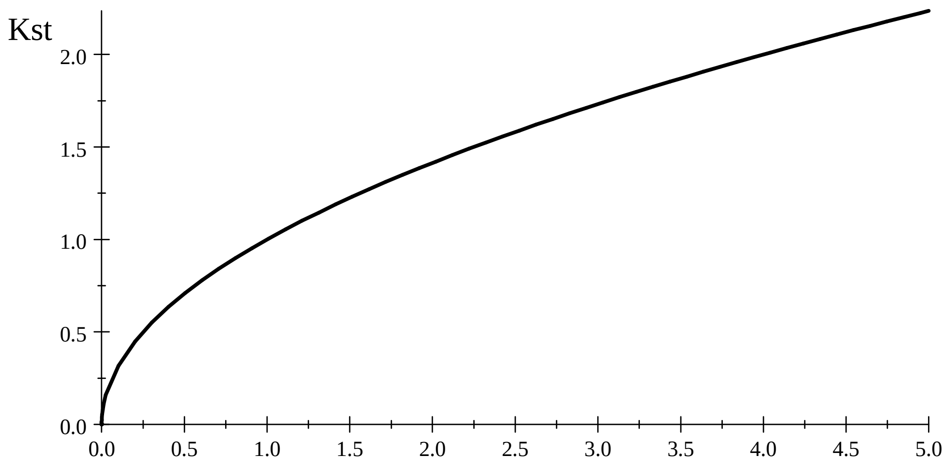


Teil 7, $a = 2$, $x = \left(\frac{10a}{p}\right)^{\frac{1}{1-a}} = \frac{p}{20}$

$$
\begin{aligned}
Kurz. \rightarrow\ p > vdk \rightarrow p > \frac{10x^a}{x} \\
p &> 10x^{a-1} \rightarrow p > 10x \\
p &> 10\frac{p}{20} \\
1 &> \frac{1}{2} \rightarrow \text{okay}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Lang. \rightarrow\ p > dk \rightarrow p > 10x^{a-1} + \frac{10}{x} \\
p &> 10x + \frac{10}{x} \rightarrow p > 10\frac{p}{20} + \frac{10}{\frac{p}{20}} \\
p &> \frac{p}{2} + \frac{200}{p} \\
2p^2 &> p^2 + 400 \\
p^2 &> 400 \rightarrow \text{okay für } p > 20
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6a $K(x) = x^{0.5}$



1) Falsch (sollte explodieren, das ist nicht der Fall, da die Skalenerträge immer positiv sind); mathematisch is es möglich, macht aber keinen Sinn

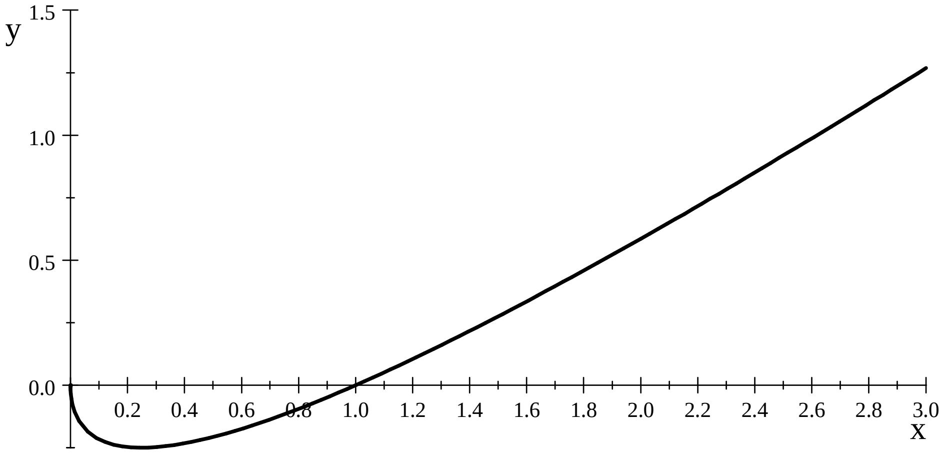
$$GK = 0.5x^{-0.5} = \frac{0.5}{\sqrt{x}}$$
$$p = \frac{0.5}{\sqrt{x}}$$
$$x = \frac{0.25}{p^2}$$

2) Richtig, Erklärung vom Punkt 1; 3),4) Richtig; 5) Falsch; 6) Richtig (die Unternehmung könnte mehr Gewinne erzielen, wenn

sie die Produktion erhöhen würde)

$$G = px - Kst = px - x^{0.5} \to \max$$
$$x = \frac{0.25}{p^2}$$

z. B. $p = 1, x = 0.25$



Aufgabe 6b $K(x) = 16 + x^2$

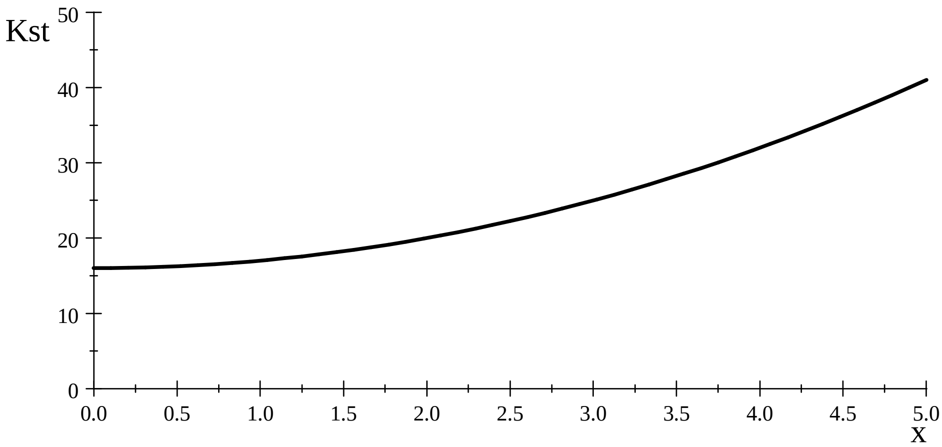
1) Richtig, kurz. Angebotsfunktion

$$p = 2x$$
$$x = \frac{p}{2}$$

$$p > vdk \to p > \frac{x^2}{x}$$
$$p > \frac{p}{2}$$
$$1 > \frac{1}{2} \to \text{okay}$$

2) Falsch; 3) Falsch; 4) Richtig; 5) Falsch; 6) Falsch

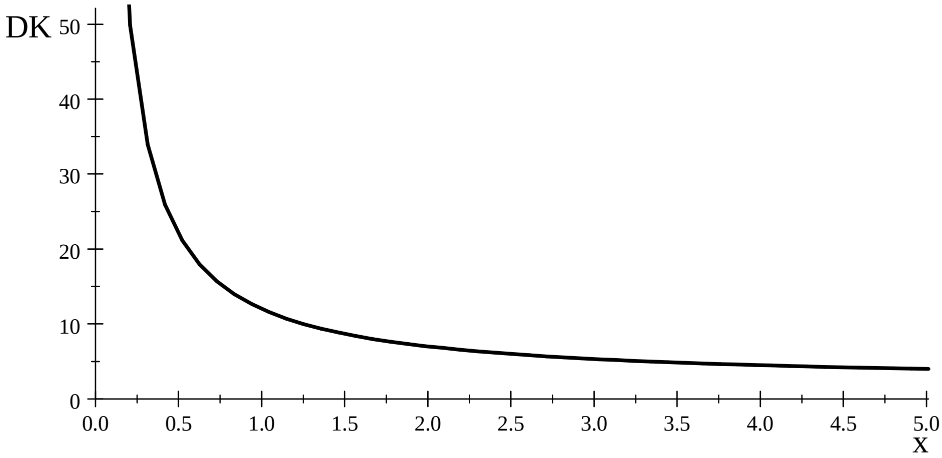
$$
\begin{aligned}
p &> dk \rightarrow p > \frac{16}{x} + x \\
p &> \frac{16}{\frac{p}{2}} + \frac{p}{2} \rightarrow p > \frac{32}{p} + \frac{p}{2} \\
p^2 &> 64 \rightarrow \text{okay für } p > 8
\end{aligned}
$$



<u>Aufgabe 6c</u>

1) Richtig, Supergewinn verschwindet (siehe Unterlage Kosten); 2) Richtig, keine Supergewinne, die normalen Gewinne sind in den Kosten integriert; 3) Falsch (siehe 2); 4) Falsch, nur langfristig; 5) Richtig, da die Skalenerträge immer konstant sind (siehe Unterlage Kosten, konstant nur bei einem Punkt); 6) Richtig (neg. Skalenerträge sollen aber vorhanden sein)

$$
\begin{aligned}
Kst &= ax + c \\
DK &= a + \frac{c}{x}
\end{aligned}
$$



Aufgabe 6d

$$
\begin{aligned}
DK &= \frac{16}{x} + x \\
DK' &= -\frac{16}{x^2} + 1 \\
Min &\rightarrow -\frac{16}{x^2} + 1 = 0 \rightarrow x = 4 \\
DK_{\min} &= \frac{16}{4} + 4 = 8 = p \\
x_{Markt} &= 48 - 8 = 40 \\
\frac{40}{4} &= 10 \text{ Unternehmungen}
\end{aligned}
$$